数理解析研究所講究録
732巻 1990年 1-7

CONGRUENCE AND DIMENSION OF NON-SEPARABLE METRIC SPACES

山口大・教育　服部　泰直 (Yasunao Hattori)

距離空間における次元と、特殊な距離関数の関係について調べる。

<u>定義1</u>. 距離空間 (X, d) は、non-zero distance $d(x, y)$ が互いに異なるとき、(即ち、$\{x, y\} \neq \{u, v\}$ かつ $x \neq y$ ならば、$d(x, y) \neq d(u, v)$ が成り立つとき、) <u>strongly rigid</u> と呼ばれる。

L. Janos は、1972年に、strongly rigid metric の概念を使い、可分距離空間の0次元性を特徴付けた:

<u>定理A</u> ([2]). X を空でない可分距離空間とする。このとき、X の位相を導く strongly rigid metric d が存在することと、$\dim X = 0$ であることとは、同等である。

最近 L. Janos は、この定理を高次元へ拡張することを試みた。それを述べる為に、定義が必要である。

定義2（[3]）. (X, d) を距離空間とする。X の2つの部分集合 A, B が<u>合同</u>である（congruent）とは、A から B の上への全単射 $f: A \to B$ で、$d(f(a_1), f(a_2)) = d(a_1, a_2)$ が任意の $a_1, a_2 \in A$ に対して成り立つものが存在するときをいう。

"合同"の概念を使って、上の定理Aを言い換えると、次のようになる。

<u>定理 A′</u>　X を空でない可分な距離空間とする。このとき、$\dim X = 0$ であることと、X の位相を導く距離 d で、d に関して、濃度が2である合同な相異なる2つの部分集合が存在しないものが存在することとは、同等である。

そこで、定理 A′ の濃度を"2"から"3"にすることにより、L. Janos は、次を得た。

<u>定理 B</u>（[3]）.　X を局所コンパクトな可分距離空間とする。このとき、X が、次の条件 ⊛ をみたす距離 d を持

つならば、$\dim X \leq 1$ である！

　㊍　d に関して、濃度が3である相異なる2つの合同な部分集合が、存在しない。

この小論の目的は、上の条件㊍の本質性を、考えていくことである。まず、次の例から、条件㊍から、separability が導けないことが、わかる。

例　$A = [0, c)$ とし、半開区間 $(0, 1]$ を $(0, 1] = \{t_\alpha \mid \alpha \in A\}$ と、well-order する。$S(A)$ を、A を index set とする star-space (hedgehog space) とし、ρ を $S(A)$ の標準的な距離とする。$X = \{(t_\alpha, \alpha) \mid \alpha \in A\} \subset S(A)$、$d = \rho|_X$ とすると、(X, d) は条件㊍をみたすが、明らかに、その weight は c である。

条件㊍と、次元との本質的な関係は、次である。

定理1.　X が㊍をみたす距離 d を持つ距離空間ならば、$\operatorname{ind} X \leq 1$ である。

証明は、[1] を見られたい。

定理Aと、上の定理との比較において、$\circledast$が、$\dim X \leq 1$（或いは、$\operatorname{ind} X \leq 1$）を特徴付けられるかという問題が考えられるが、これは、コンパクト空間でさへ、否定的である。このことは、次のことよりわかる。

<u>事実</u>（M. Bestivina）．　(X, d) を$\circledast$をみたすコンパクト距離空間とする。このとき、Xは$\mathbb{R}^2$に、埋め込まれる。

証明　$|X| \geqq 2$ としてよい。$x_1 \neq x_2 \in X$ を fix する。$i : X \to \mathbb{R}^2$ を $i(x) = (d(x_1, x),\ d(x_2, x))$, for $x \in X$ とすると、iが埋め込みになる。

さて、Mを Mengerの1次元万有空間とすると、Mを$\mathbb{R}^2$に埋め込むことは、できない。従って、上のBestivinaの事実より、Mは、$\circledast$をみたす距離を持たない。これらのことより次の問題が生ずる。これは、未解決である。

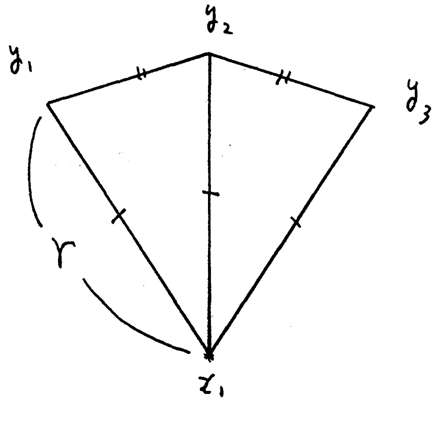
<u>問題</u>（L. Janos）　Xをコンパクト（または、局所コンパクトな可分）距離空間とする。このとき、Xが更にいかなる条件を持てば、Xは$\circledast$をみたす距離を持つか？

次に条件㊟を離れて，$\mathrm{ind}\, X \leq 1$ であるための必要十分条件を考えていく。最近，L. Janos [4] は，定理1の証明より次の概念を抽出した。

<u>定義3</u>（[4]）．(X, d) を距離空間，$x \in X$，$r > 0$ とする。このとき，四点 $\{x, y_1, y_2, y_3\}$ の配置が頂点 x と長さ r の隣接した二等辺三角形の組を形造るとは，

$$d(x, y_i) = r \quad \text{for} \quad i = 1, 2, 3, \quad \text{and}$$
$$d(y_1, y_2) = d(y_3, y_2)$$

をみたすことである。



<u>定理C</u>（[4]）．(X, d) は，次の条件 (＊＊) をみたす距離空間とすると，$\mathrm{ind}\, X \leq 1$ である：

(＊＊) $\forall x \in X$，$\forall r > 0$ に対し，
$\exists \varepsilon \leq r$ s.t. x を頂点とし長さが ε の隣接する二等辺三角形の組が存在しない。

定理 C の証明は、定理 1 のそれと全く同様である。また明らかに 条件 (∗∗) の方が条件 (∗) より弱い。そこで、次の問題を問うことができる。

問題 (L. Janos). X をコンパクト（或いは、可分な）距離空間とする。このとき、$\dim X \leq 1$ ならば、(∗∗) をみたす距離 d を X が持つか？

さて、次に star-rigid metric に関する Janos-Martin の問題について考える。

定義 4 ([5]). 距離関数 d が star-rigid であるとは、X の任意の 3 点 x, y, z （ただし、$y \neq z$）に対して、$d(x, y) \neq d(x, z)$ が成り立つときを云う。

Janos-Martin [5] は、star-rigid metric と次元との関係を調べ、次を得た。

定理 D ([5]). X を空でない可分な距離空間とする。このとき、$\dim X = 0$ であることと、X が全有界な star-rigid metric d を持つこととは、同等である。

彼らは、同じ論文で、次を問うた"距離空間 X が star-rigid metric を持つならば、$\mathrm{ind}\, X \leq 0$ であるか？" ここで我々は、定理1と同様にして（むしろより単純に）、この問題を肯定的に解決することができる。即ち、

定理2. X を空でない距離空間とする。このとき、X が、star-rigid metric を持つならば、$\mathrm{ind}\, X = 0$ である。

References

[1] Y. Hattori, Congruence and dimension of non-separable metric spaces, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.

[2] L. Janos, A metric characterization of zero-dimensional spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 31 (1972), 268-270.

[3] ________, Congruence and one-dimensionality of metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), 1268-1270.

[4] ________, A geometric condition implying one-dimensionality, Abstracts of papers presented to the Amer. Math. Soc., 10 No.5 (1989), 410-411.

[5] ________ and H. Martin, Metric characterizations of dimension for separable metric spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 70 (1978), 209-212.